

Automates, Codes et Graphes
Fiche de TD (calcul matriciel)

1. (a) Trouver x, y, z et t dans \mathbb{R} tels que

$$\begin{pmatrix} 3x+y & x-3y \\ 4z-2t & z+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

(b) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

1. Calculer AB et BA
 2. Peut-on trouver une matrice réelle X telle que $AX = B$?
 3. Peut-on trouver une matrice réelle Y telle que $YA = B$?
-

2. Soient les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -i & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 3i \\ -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2i & 1+i & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer si possible:

- (a) $(A+E).F$ $C.E$ et $E.C$
 - (b) $(2D)A.B$ ${}^t F.D - {}^t A$
 - (c) $3B^2 + {}^t A.F$ $C.B + {}^t E.{}^t A.F$
-

3. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- (a) Montrer que $J^2 - J - 2I_3 = (0)$
 - (b) Dédurre J^{-1}
 - (c) Retrouver J^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan
-

4. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Montrer que $(M - I)(M + 3I) = (0)$

(b) Montrer que M est inversible et trouver M^{-1}

(c) Trouver M^2 en fonction de M et de I

(d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ il existe $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M^n = a_n M + b_n I$. En déduire M^3

5. Calculer

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \quad C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n \text{ où } n \in \mathbb{N}$$

6. Calculer l'inverse de la matrice suivante par la méthode de Gauss Jordan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$